Chapitre 5 – Fonctions et représentations

1. Déterminer graphiquement des images et des antécédents – Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$

PAS À PAS

01. On a donc : $f(2) = 1$.

02. Le(s) antécédent(s) de 5 par la fonction f est (sont) donc : $-0{,}45$ et $4{,}4$.

03.a. On commence donc par se placer en 4 sur l'axe des ordonnées.

b. On trace ensuite la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par la valeur 4 en ordonnée, c'est-à-dire la droite d'équation $y = 4$.

c. On repère le(s) point(s) d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de la fonction f.

d. On trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce(s) point(s) d'intersection.

Elle(s) coupe(nt) l'axe des abscisses en une valeur égale à le(s) antécédent(s) cherché(s).

e. L'équation $f(x) = 4$ a donc pour solution(s) : $\mathcal{S} = \{2{,}2\}$.

04. L'inéquation $f(x) > 2$ a donc pour solution(s) : $\mathcal{S} =]4\,;+\infty[$.

05. L'inéquation $f(x) \geq 2$ a donc pour solution(s) : $\mathcal{S} = [4; +\infty[$

06.a. On commence donc par se placer en 3 sur l'axe des ordonnées.

b. On trace ensuite la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par la valeur 3 en ordonnée, c'est-à-dire la droite d'équation $y = 3$.

c. On repasse d'une autre couleur la (les) portion(s) de courbe située en dessous de cette droite (car l'inéquation est ici $f(x) < 3$).

d. On repasse sur l'axe des abscisses les réels correspondant à la (les) portions(s) de courbe repassée d'une autre couleur.

e. On relève les valeurs des abscisses correspondantes pour obtenir les solutions de l'inéquation.

L'inéquation $f(x) < 3$ a donc pour solution(s) : $\mathcal{S} =]-2\,;6[$.

07. L'inéquation $f(x) \leq 3$ a donc pour solution(s) : $\mathcal{S} = [-2; 6]$

À VOUS DE JOUER

08. –3

09. 2

10. $\mathcal{S} = \{0{,}5\}$

11. $\mathcal{S} =]-\infty; 1[$

12. $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$

13. $\mathcal{S} =]2{,}5; +\infty[$

14. $\mathcal{S} = [2{,}5; +\infty[$

15. –3

16. –4,5 et 0,45

17. $\mathcal{S} = \{-2\}$

18. $\mathcal{S} =]-3{,}8\,; -0{,}3[$

19. $\mathcal{S} = [-3{,}8\,; -0{,}3]$

20. $\mathcal{S} =]-\infty\,; -4{,}25[\cup]0{,}2\,; +\infty[$

21. $\mathcal{S} =]-\infty\,; -4{,}25] \cup [0{,}2\,; +\infty[$

22. 0,2

23. –1

24. $\mathcal{S} = \{0{,}5\}$

25. $\mathcal{S} =]0\,; 1[$

26. $\mathcal{S} =]0\,; 1]$

27. $\mathcal{S} =]-\infty\,; 0[\cup]0{,}3\,; +\infty[$

28. $\mathcal{S} =]-\infty\,; 0[\cup [0{,}3\,; +\infty[$

29. 3

30. 2

31. $\mathcal{S} = \{4{,}6\}$

32. $\mathcal{S} = [0; +\infty[$

33. $\mathcal{S} = [0; +\infty[$

34. $\mathcal{S} = \emptyset$

35. $\mathcal{S} = \{0\}$

36. –1

37. –2,6 et 0,6

38. $\mathcal{S} = \{4,6; 2,6\}$

39. $\mathcal{S} =]-2,8; 0,8[$

40. $\mathcal{S} = [-2,8; 0,8]$

2. Déterminer le signe d'une expression factorisée du second degré à l'aide d'une image mentale de la courbe représentative de la fonction correspondante

PAS À PAS

01.a. Ici, compte tenu de la forme factorisée du polynôme du second degré, ce dernier admet deux racines réelles distinctes qui sont : 3 et 4.

b. Par ailleurs, le coefficient de son monôme de degré 2 est égal à 2 : il est donc de signe positif.

c. On en déduit que l'allure de la courbe représentative de P est la 1.

d. Finalement, le tableau de signes du polynôme $P(x)$ est :

Valeurs de x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

02.a. Ici, compte tenu de la forme factorisée du polynôme du second degré, ce dernier admet deux racines réelles distinctes qui sont : –7 et 6

b. Par ailleurs, le coefficient de son monôme de degré 2 est égal à –5 : il est donc de signe négatif.

c. On en déduit que l'allure de la courbe représentative de P est la 2.

d. Finalement, le tableau de signes du polynôme $P(x)$ est :

Valeurs de x	$-\infty$		-7		6		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

03.a. Ici, compte tenu de la forme factorisée du polynôme du second degré, ce dernier admet une racine double qui est : –9.

b. Par ailleurs, le coefficient de son monôme de degré 2 est égal à 8 : il est donc de signe positif.

c. On en déduit que l'allure de la courbe représentative de P est la 1.

d. Finalement, le tableau de signes du polynôme $P(x)$ est :

Valeurs de x	$-\infty$		-9		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$+$	

04.a. Ici, compte tenu de la forme factorisée du polynôme du second degré, ce dernier admet une racine double qui est : 11.

b. Par ailleurs, le coefficient de son monôme de degré 2 est égal à –10 : il est donc de signe négatif.

c. On en déduit que l'allure de la courbe représentative de P est la 2.

d. Finalement, le tableau de signes du polynôme $P(x)$ est :

Valeurs de x	$-\infty$		11		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$-$	

À VOUS DE JOUER

05.

Valeurs de x	$-\infty$		4		6		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

06.

Valeurs de x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

07.

Valeurs de x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$+$	

08.

Valeurs de x	$-\infty$		9		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$-$	

09.

Valeurs de x	$-\infty$		-1		9		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

10.

Valeurs de x	$-\infty$		-6		9		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

11.

Valeurs de x	$-\infty$		-9		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$+$	

12.

Valeurs de x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$-$	

13.

Valeurs de x	$-\infty$		-9		$\frac{1}{9}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

14.

Valeurs de x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		3		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

15.

Valeurs de x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$+$	

16.

Valeurs de x	$-\infty$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$-$	

17.

Valeurs de x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$-$	

18.

Valeurs de x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$-$	

19.

Valeurs de x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$+$	

20.

Valeurs de x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$-$	

21.

Valeurs de x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		π		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Déterminer graphiquement le signe d'une fonction ou son tableau de variations

PAS À PAS

01.a. 1 et 5

b. et c.

Valeurs de x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

02.a. –2 et 5

b. –1 et 3 mais aussi 1 et –4,4

c. et d.

Valeurs de x	-2		-1		3		5
Variations de f	-0,2	↗	1	↘	-4,4	↗	1

À VOUS DE JOUER

03.

Valeurs de x	-1		$1{,}3$		3
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Valeurs de x	-1		3
Variations de f	–7	↗	5

04.

Valeurs de x	-2		2		4
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Valeurs de x	-2		4
Variations de f	4	↘	–2

05.

Valeurs de x	-3		-1		3
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Valeurs de x	-3		2		3
Variations de f	2	↘	-3	↗	-2

06.

Valeurs de x	-5		-2		0
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0

Valeurs de x	-5		-1		0
Variations de f	-3	↗	1	↘	0

07.

Valeurs de x	0		3
Signe de $f(x)$		$+$	

Valeurs de x	0		1		3
Variations de f	3	↘	2	↗	6

08.

Valeurs de x	-2		0
Signe de $f(x)$		$-$	

Valeurs de x	-2		-1		0
Variations de f	-4	↗	-3	↘	-4

09.

Valeurs de x	1		5
Signe de $f(x)$		$+$	

Valeurs de x	1		5
Variations de f	3	↘	2,2

10.

Valeurs de x	-2		-1		2		3
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Valeurs de x	-2	$0{,}5$	3
Variations de f	4	↘ −2,2 ↗	4

11.

Valeurs de x	-2		-1		4
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Valeurs de x	-2		4
Variations de f	1	↘	−1,4

12.

Valeurs de x	-1		0		4
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Valeurs de x	-1		4
Variations de f	−1	↗	1,2

13.

Valeurs de x	-4		-3		1		2
Signe de$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Valeurs de x	-4		-1		2
Variations de f	−5	↗	4	↘	−5

14.

Valeurs de x	0		1		2		3		4
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Valeurs de x	0		$1{,}4$		$2{,}6$		4
Variations de f	−6	↗	0,4	↘	−0,4	↗	6

15.

Valeurs de x	-6		-5		-2		$0{,}6$		$1{,}6$		5
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	+	0	$-$	0	+	0

Valeurs de x	-6		-4		-2		-1		1		3		5
Variations de f			2				4				3		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	−2				0				−1				0

16.

Valeurs de x	-6		$-4{,}7$		$-1{,}6$		$1{,}6$		$4{,}7$		6
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Valeurs de x	-6		$-3{,}1$		0		$3{,}1$		6
Variations de f	2				2				2
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			−2				−2		

4. Exploiter une équation de courbe (appartenance d'un point, calcul de coordonnées)

PAS À PAS

01.a. On remplace alors x par l'abscisse de M, qui vaut 1, dans ce membre et on effectue le calcul : $3 \times 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 4$.

b. On compare ce résultat avec l'ordonnée de M, qui vaut 2.

c. Donc, M n'appartient pas à la courbe d'équation $y = -3x^2 + 4x - 5$.

02.a. $y = \frac{7}{6-8} = -\frac{7}{2}$

b. L'ordonnée du point d'abscisse 6 de la courbe d'équation $y = \frac{7}{x-8}$ est donc égale à $-\frac{7}{2}$.

03.a. $9 = 10x - 11$

$9 + 11 = 10x - 11 + 11$

$20 = 10x$

$$\frac{20}{10} = \frac{10x}{10}$$

$2 = x$

b. L'abscisse du point d'ordonnée 9 de la courbe d'équation $y = 10x - 11$ est donc égale à 2.

À VOUS DE JOUER

04. NON

05. OUI

06. NON

07. NON

08. OUI

09. OUI

10. 4

11. 1

12. –20

13. $\frac{9}{2}$

14. Il n'y en a pas.

15. 0

16. $\frac{5}{6}$

17. 1 ou –1

18. $\frac{2}{3}$

19. $\frac{5}{14}$

20. $-\frac{11}{6}$

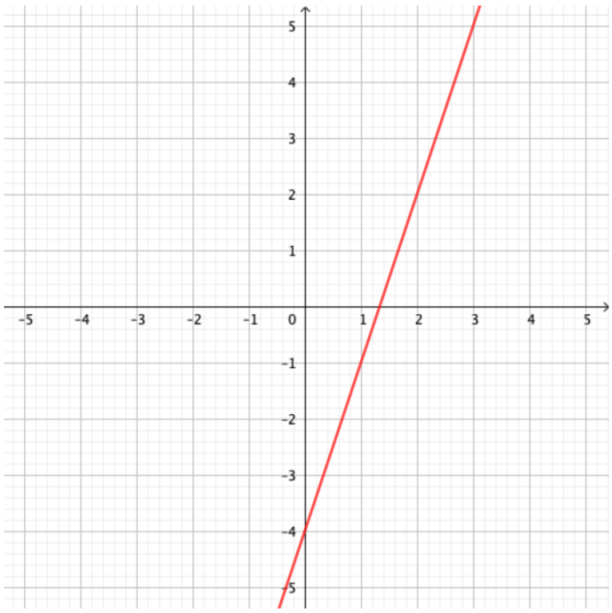
5. Tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur

PAS À PAS

01.a. L’ordonnée à l’origine est ici égale à –4.

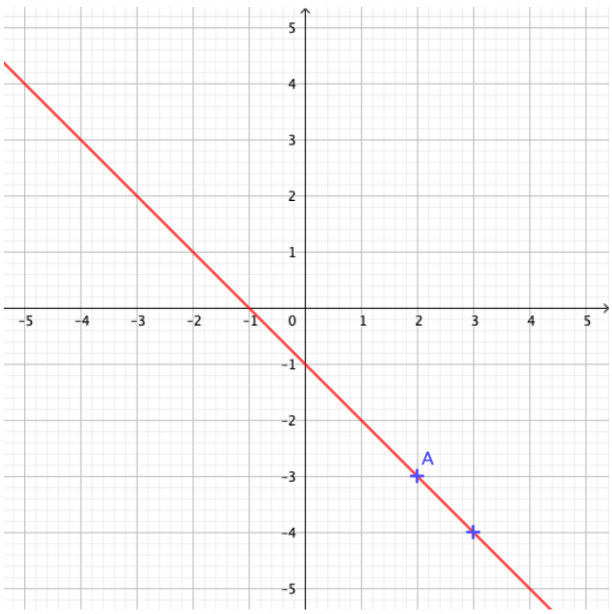
c. On calcule les coordonnées d’un deuxième point à partir de l’équation : $(2 ; 2)$.

d.



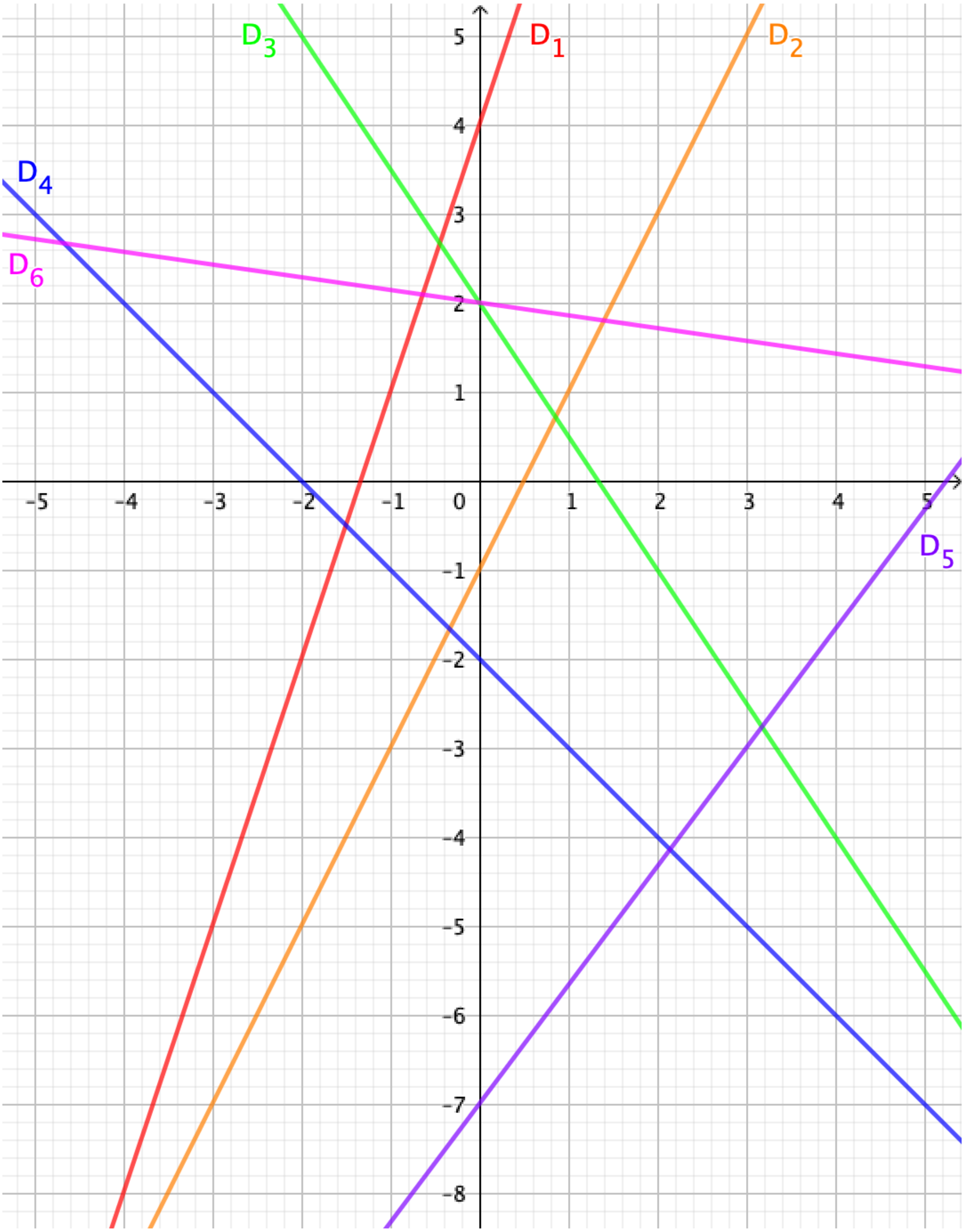
02.b. La pente est ici égale à –1.

c. À partir du point tracé précédemment, on se décale donc d’une unité en abscisse et on descend d’une unité en ordonnée.

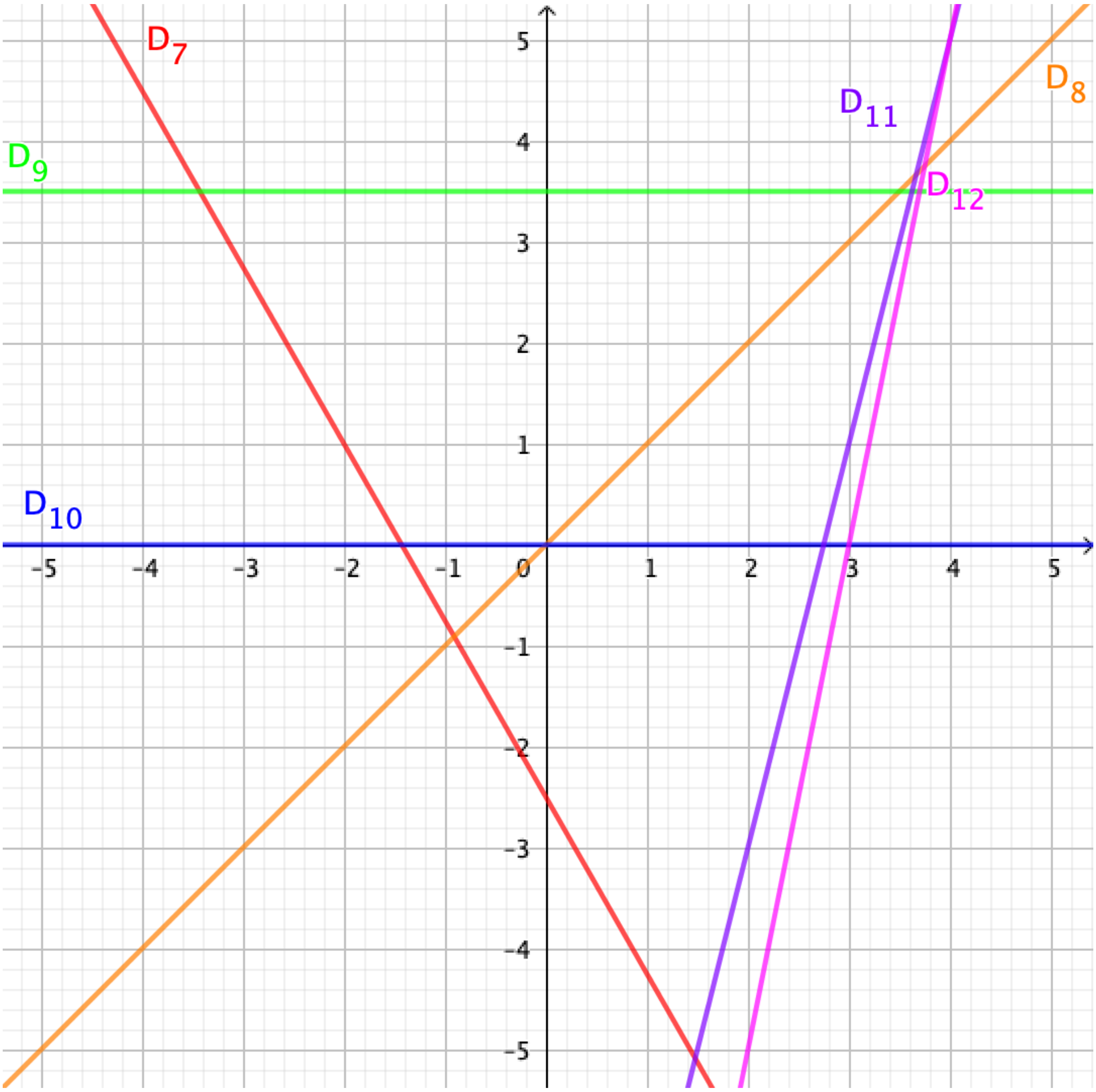


À VOUS DE JOUER

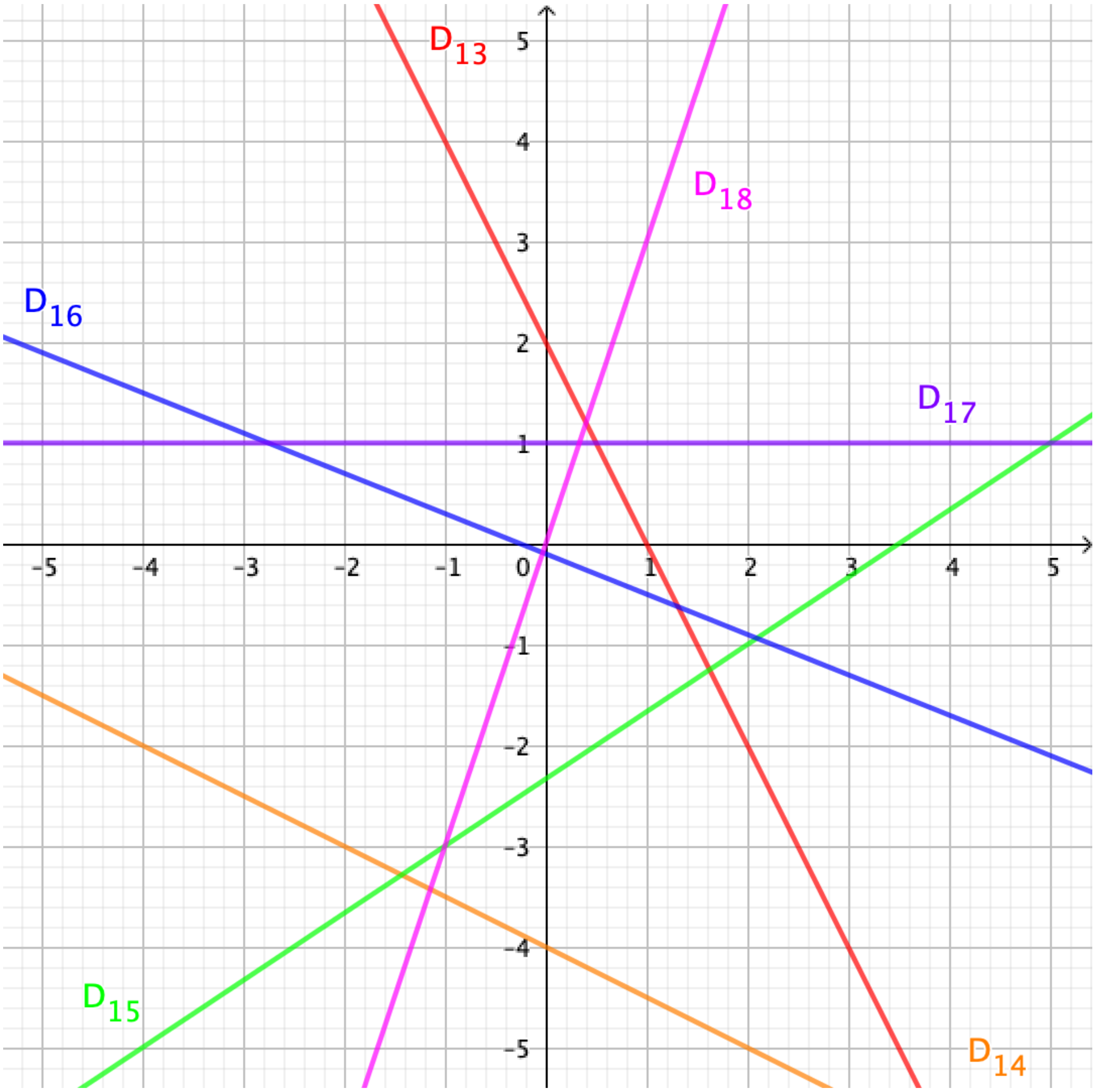
03. 04. 05. 06. 07. 08.



09. 10. 11. 12. 13. 14.



15. 16. 17. 18. 19. 20.



6. Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite

PAS À PAS

01.a. Elle coupe l'axe des ordonnées en –3.

b. On en déduit que $b = -3$.

c. Partant du point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées, on se décale d'une unité en abscisse. On se décale alors de 2 unités en ordonnées vers le haut.

d. On en déduit que $a = 2$.

e. Elle a donc pour équation : $y = 2x - 3$.

02.a. Elle coupe l'axe des ordonnées en 2.

b. On en déduit que $b = 2$.

c. Partant du point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées, on se décale de 2 unités en abscisse. On se décale alors de 3 unités en ordonnées vers le bas.

d. On en déduit que $a = -\frac{3}{2}$.

e. Elle a donc pour équation : $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

À VOUS DE JOUER

03. $y = 4{,}8$

04. $y = -1{,}2$

05. $y = 3x + 1$

06. $y = 6x - 5$

07. $y = -4x + 4$

08. $y = -x - 3$

09. $y = \frac{5}{4}x - 1$

10. $y = \frac{1}{3}x + 2$

11. $y = \frac{2}{5}x - 3$

12. $y = -\frac{1}{5}x + 2$

13. $y = -\frac{7}{5}x + 5$

14. $y = -3x + 4$

15. $y = \frac{1}{5}x + 0,4$

16. $y = -\frac{2}{3}x - 1,8$

17. $y = \frac{4}{5}x - 2,4$

7. Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points

PAS À PAS

01.a. On commence par comparer les abscisses des points A et B. Ici, $x_A = 4$ et $x_B = 7$. Donc, elles ne sont pas égales.
b. Par conséquent, la droite (AB) admet une équation réduite de la forme $y = ax + b$, où a et b sont deux constantes réelles.
c. On calcule d'abord a : $a = \frac{6-5}{7-4} = \frac{1}{3}$.
d. On a donc : $5 = \frac{1}{3} \times 4 + b$.
e. On trouve : $b = 5 - \frac{1}{3} \times 4 = \frac{11}{3}$
f. Finalement, la droite (AB) a pour équation : $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

À VOUS DE JOUER

02. $y = x - 2$

03. $y = 7$

04. $y = \frac{8}{3}x - 7$

05. $y = 0$

06. $y = -\frac{9}{16}x + \frac{9}{2}$

07. $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

08. $y = \frac{2}{9}x + 4$

09. $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

10. $y = 8$

11. $y = -\frac{5}{6}x - \frac{59}{6}$

12. $y = \frac{1}{5}x + \frac{18}{5}$

13. $y = 6x - 39$

14. $y = -8x + 23$

15. $y = \frac{3}{11}x - \frac{24}{11}$

16. $y = -14x + 7$

17. $y = -\frac{19}{23}x + \frac{20}{23}$

8. Déterminer graphiquement le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

PAS À PAS

01.a. Partant du point A, on se décale d'une unité en abscisse. On se décale alors de 2 unités en ordonnées vers le haut.
b. On en déduit que le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A est égal à 2.

02.a. Partant du point A, on se décale de 2 unités en abscisse. On se décale alors de 1 unité en ordonnées vers le bas.
b. On en déduit que le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A est égal à $-\frac{1}{2}$.
03. Ici, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
On en déduit que le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A est égal à 0.

À VOUS DE JOUER

04. $\frac{1}{4}$

05. –2

06. 6

07. –2

08. 0

09. $-\frac{1}{2}$

10. $-\frac{1}{2}$

11. –1

12. $\frac{1}{2}$

13. $\frac{1}{4}$

14. $\frac{1}{2}$

15. $-\frac{7}{5}$

16. 4

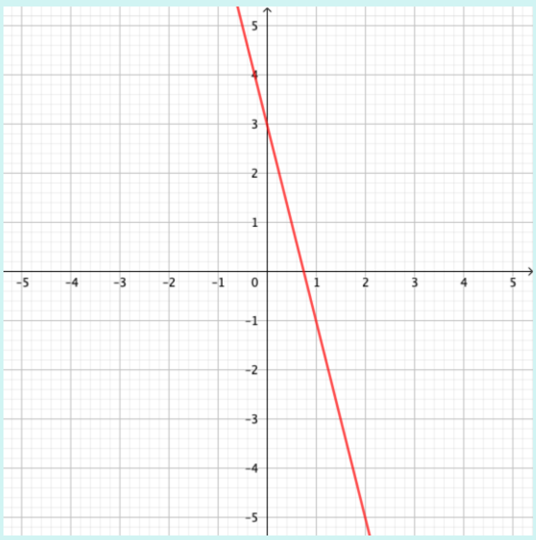
17. 2

18. –2

19. –3

20. $-\frac{4}{3}$

9. BILAN INTERMÉDIAIRE • CHAPITRE 5

<table>
<tr><td>01</td><td>Graphiquement, l'image de 3,2 est égale à</td><td>–0,4</td></tr>
<tr><td>02</td><td>Graphiquement, le(s) antécédent(s) de 3 est (sont)</td><td>–3,8 ; –2,2 ; 4,4</td></tr>
<tr><td>03</td><td>Graphiquement, l'équation $f(x) = 3{,}4$ a pour solution</td><td>$\mathcal{S} = \{-3; 4{,}5\}$</td></tr>
<tr><td>04</td><td>Graphiquement, l'inéquation $f(x) < 4$ a pour solution</td><td>$\mathcal{S} = [-5; 4{,}6[$</td></tr>
<tr><td>05</td><td>Dresser le tableau de variation de f</td><td>
<table>
<tr><td>Valeurs de x</td><td>-5</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>Variations de f</td><td>0,2</td><td>↗</td><td>3,4</td><td>↘</td><td>-1,8</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>06</td><td>Donner le tableau de signes du polynôme
$P(x) = -2(x+3)(x-4)$</td><td>
<table>
<tr><td>Valeurs de x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>4</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>Signe de $P(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>07</td><td>Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A.</td><td>$-\dfrac{3}{2}$</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="2">Tracer la droite d'équation $y = -4x + 3$ sur le graphique ci-dessous.
</td></tr>
<tr><td>09</td><td>Le point $M\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ appartient-il à la droite d'équation $y = -3x + 1$? Justifier la réponse.</td><td>Oui, car $-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 2$.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Soit $A(-4; 3)$ et $B(2; -1)$.
Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).</td><td>$y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$</td></tr>
</table>

10. BILAN INTERMÉDIAIRE • CHAPITRES 1 À 5

01	Dans un lycée, 60 % des élèves sont des filles. Parmi les filles, 40 % sont en filière technologique. Quelle est la proportion (en pourcentage) de filles en filière technologique dans ce lycée ?	24 %
02	Le prix d'un article est passé de 80 € à 64 €. Quel est le pourcentage de réduction ?	–20 %
03	Un article a augmenté de 50 %, puis baissé de 20 %. Quel est le taux d'évolution (en pourcentage) équivalent à ces deux évolutions ?	+20 %
04	Un article a baissé de 20 %. Quel pourcentage faudrait-il appliquer pour revenir au prix initial ?	+25 %
05	Comparer $\frac{4}{5}$ et $\frac{6}{7}$.	$\frac{4}{5} < \frac{6}{7}$
06	Écrire le nombre 123456 sous forme scientifique.	$123456 = 1{,}23456 \times 10^5$
07	Résoudre l'équation $x^2 = \frac{4}{9}$.	$\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$
08	Déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{5}{4}x - 1$.	$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{5}{4}$
09	Déterminer l'ordonnée du point de cette droite d'abscisse 2.	$-\frac{1}{12}$
10	Déterminer l'abscisse du point de cette droite d'ordonnée égal à $\frac{1}{4}$.	3