CORRIGÉS

MATHÉMATIQUES

CHAPITRE 6 – Trigonométrie

Testez vos prérequis

1. B – **2.** C – **3.** A – **4.** C – **5.** B – **6.** B

■ Cours et Méthodes 1 Le cercle trigonométrique

À vous de jouer !

1. a) Le réel $\frac{\pi}{2}$ repère le point J. Tous les réels qui repèrent J sont donc de la forme : $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{R}$).

b) $-\frac{3\pi}{2}$ est l'unique réel de $[-2\pi\,; 0[$ repérant le point J.

2. a) 20° correspond à $\frac{\pi}{9}$ radians.

b) $\frac{5\pi}{3}$ radians correspond à 300°.

■ Cours et Méthodes 2 Mesures d'un angle orienté de vecteurs

À vous de jouer !

1. a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) L'angle orienté $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ a, entre autres, pour mesures $-\frac{\pi}{3}$ (avec $k = 0$), $\frac{5\pi}{3}$ (avec $k = 1$), $-\frac{7\pi}{3}$ (avec $k = -1$).

L'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})$ a, entre autres, pour mesures $\frac{\pi}{6}$ (avec $k = 0$), $\frac{13\pi}{6}$ (avec $k = 1$), $-\frac{11\pi}{6}$ (avec $k = -1$).

2. a) La mesure principale de $\frac{13\pi}{6}$ est $\frac{\pi}{6}$.

b) La mesure principale de $-\frac{23\pi}{4}$ est $\frac{\pi}{4}$.

■ Cours et Méthodes 3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

À vous de jouer !

1. a) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

b) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

■ Cours et Méthodes 4 Équations trigonométriques de la forme cos *x* = *a*

À vous de jouer !

1. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Les solutions dans $]-\pi\,; \pi]$ de l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ sont :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} \\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

■ Cours et Méthodes 5 Équations trigonométriques de la forme sin *x* = *a*

À vous de jouer !

1. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ sont :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Les solutions dans $]-2\pi\,; 0]$ de l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5\pi}{4} \\ x_2 = -\frac{7\pi}{4} \end{cases}.$$

■ Cours et Méthodes 6 Angles associés

À vous de jouer !

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

2. $\frac{17\pi}{6} = \frac{12\pi + 5\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$.

Donc : $\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$. Donc : $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

■ Cours et Méthodes 7 Fonctions circulaires cosinus et sinus

À vous de jouer !

1. Par lecture graphique, on lit : $T = 2\pi$.

2. Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction g est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

■ Cours et Méthodes 8 Fonctions sinusoïdales de la forme $t \to A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \to A\sin(\omega t + \varphi)$

À vous de jouer !

1. On lit : $A = 4$ et $T = \pi$.

2. $\omega = 2$. La pulsation du signal est donc de 2 rad/s.

3. a) $f(t) = 4\sin(2t + \varphi)$. $4\sin\varphi = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (car $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}\,; 0]$).

La phase à l'origine est donc de $-\frac{\pi}{4}$ radians.

b) L'expression de f est alors : $f(t)=4\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$.

Testez vos connaissances

1. B – **2.** B – **3.** C – **4.** C – **5.** A – **6.** B – **7.** B – **8.** B – **9.** A – **10.** C – **11.** B – **12.** C

CHAPITRE 7 – Produit scalaire

Testez vos prérequis

1. B – **2.** A – **3.** A

■ Cours et Méthodes 1 Définitions

À vous de jouer !

1. $\vec{u}.\vec{v}=2\times6-3\times4=12-12=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. $\vec{w}$ *et* $\vec{z}$ soient orthogonaux si et seulement si $\vec{w}.\vec{z}=0$.

$\vec{w}.\vec{z}=-5\times(-1)+y\times3=5+3y$.

$\vec{w}.\vec{z}=0\Leftrightarrow5+3y=0\Leftrightarrow3y=-5\Leftrightarrow y=-\frac{5}{3}$

$\vec{w}$ et $\vec{z}$ sont orthogonaux si et seulement si $y=-\frac{5}{3}$.

■ Cours et Méthodes 2 Propriétés du produit scalaire

À vous de jouer !

1. $(\vec{u}-\vec{v}).(3\vec{u}+2\vec{v})=3\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}-3\vec{u}.\vec{v}-2\|\vec{v}\|^2$

$=3\times3^2-\vec{u}.\vec{v}+2\times2^2$

$(\vec{u}-\vec{v}).(3\vec{u}+2\vec{v})=27-3\sqrt{2}+8=35-3\sqrt{2}$.

2. $\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HG}=(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}).\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HG}.\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{HG}=HG^2=9$ car EFGH est un rectangle donc $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux.

■ Cours et Méthodes 3 Autres expressions du produit scalaire

À vous de jouer !

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,;\vec{v})=3\times2\times cos\frac{\pi}{4}=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

■ Cours et Méthodes 4 Projection d'un vecteur sur un axe

■ Cours et Méthodes 5 Calculs de longueurs et d'angles

À vous de jouer !

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5-5\\15-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-5\\0-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-10\times5+\times(-10)=-50-50=-100$.

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-10)^2+5^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ et

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{5^2+(-10)^2}=\sqrt{25+100}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=5\sqrt{5}\times5\sqrt{5}\times\cos\widehat{BAC}=-100$ donc :

$\cos\widehat{BAC}=\frac{-100}{5\sqrt{5}\times5\sqrt{5}}=\frac{-100}{125}=-\frac{4}{5}$

donc $\widehat{BAC}=\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\approx2{,}5\text{rad}$.

Testez vos connaissances

1. B – **2.** A – **3.** B – **4.** C – **5.** C – **6.** A – **7.** B

CHAPITRE 8 – Nombres complexes

Testez vos prérequis

1. A – **2.** C – **3.** A – **4.** B

■ Cours et Méthodes 1 Notion de nombre complexe et forme algébrique

■ Cours et Méthodes 2 Additions, multiplication et soustraction des nombres complexes

À vous de jouer !

1. $z=3+\frac{i}{2}=3+\frac{1}{2}i$ donc la partie réelle de z est 3 et sa partie imaginaire est $\frac{1}{2}$.

2. $(3+4i)+(1-6i)=3+4i+1-6i=4-2i$.

3. $(2+5i)(4-i)=8-2i+20i-5i^2=8+18i+5=13+18i$.

■ Cours et Méthodes 3 Division des nombres complexes

■ Cours et Méthodes 4 Complexe conjugué et opérations

À vous de jouer !

1. $\overline{z_3}=\overline{5i+1}=-5i+1=1-5i$ et $z_3\overline{z_3}=1^2+5^2=1+25=26$.

2. $\frac{z_3}{z_1}=\frac{z_3\times\overline{z_1}}{z_1\times\overline{z_1}}=\frac{(1+5i)\times(2-3i)}{(2+3i)\times(2-3i)}=\frac{2-3i+10i-15i^2}{2^2+3^2}$

$=\frac{2+7i+15}{13}=\frac{17+7i}{13}$.

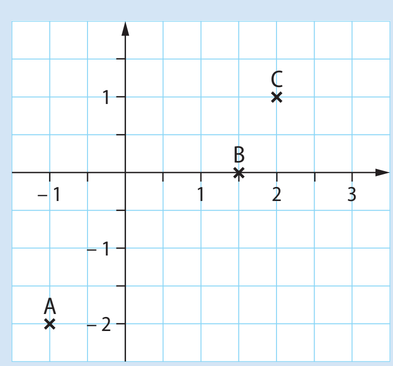
$\frac{z_1}{z_2}=\frac{17}{13}+\frac{7}{13}i$.

3. $\overline{\left(\frac{-4+5i}{1+3i}\right)}=\frac{\overline{-4+5i}}{\overline{1+3i}}=\frac{-4-5i}{1-3i}$.

■ Cours et Méthodes 5 Représentation géométrique d'un nombre complexe

À vous de jouer !

1.



2. Par lecture graphique, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z = 2{,}5 + 2i$.

3. L'affixe de $\vec{w}$ est : $z_1 = -2 - 5i$.

■ **Cours et Méthodes 6 Module d'un nombre complexe**

À vous de jouer !

1. $|z| = |5+4i| = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$.

2. $|z| = |(6+i)(7-3i)| = |6+i| \times |7-3i| = \sqrt{6^2+1^2} \times \sqrt{7^2+(-3)^2}$
$= \sqrt{37} \times \sqrt{58} = \sqrt{2\,146}$.

3. $|z| = \left|\dfrac{5i}{1+2i}\right| = \dfrac{5}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

■ **Cours et Méthodes 7 Argument d'un nombre complexe non nul**

■ **Cours et Méthodes 8 Forme trigonométrique d'un nombre complexe**

À vous de jouer !

1. $z_3 = \left[4\,;\dfrac{2\pi}{3}\right] = 4\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + 4i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
$= 4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 4i \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}i$.

2. On a $r = |z| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

et $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

$z = \left[2\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right] = 2\sqrt{2}\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i2\sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. On a $r = |z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{16} = 4$

et $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

$z = \left[4; -\dfrac{\pi}{6}\right] = 4\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i4\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Testez vos connaissances

1. C – **2.** B – **3.** B – **4.** A – **5.** C – **6.** B – **7.** A – **8.** C – **9.** C – **10.** A – **11.** B – **12.** B – **13.** C

CHAPITRE 9 – Dérivées

Testez vos prérequis

1. B et C – **2.** C – **3.** A – **4.** B

■ **Cours et Méthodes 1 Taux d'accroissement**

■ **Cours et Méthodes 2 Nombre dérivé**

■ **Cours et Méthodes 3 Tangente**

À vous de jouer !

$f'(-2) = 9$, $f'(0) = -3$, $f'(1) = 0$.

■ **Cours et Méthodes 4 Fonction dérivée**

À vous de jouer !

$g_1'(-1) = -2$; équation de la tangente $y = -2(x+1)+1 = -2x-1$.
$g_2'(\pi) = \cos(\pi) = -1$; équation de la tangente
$y = -1(x-\pi) + \sin(\pi) = -x + \pi$.

■ **Cours et Méthodes 5 Opérations et dérivation (somme et produit)**

À vous de jouer !

1. La fonction f est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant les fonctions $u(x) = 3x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $w(x) = -x+2$ on obtient pour $x \in \mathbb{R}$:

$u'(x) = 9x^2$ $\qquad v'(x) = -4x$ $\qquad w'(x) = -1$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = 9x^2 - 4x - 1$.

2. La fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant les fonctions $u(x) = \dfrac{-3}{x}$ et $v(x) = x^2$ on obtient pour $x \in \mathbb{R}$:

$u'(x) = -3\left(\dfrac{-1^2}{x}\right) = \dfrac{3}{x^2}$ et $v'(x) = 2x$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = u'(x) + v'(x) = \dfrac{3}{x^2} + 2x$.

3. La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; ces deux fonctions sont des sommes de fonctions dérivables. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant les fonctions $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = 2x^2 - 3x$, on obtient pour tout réel x :

$u'(x) = 2x$	$v'(x) = 4x - 3$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f'(x) = (2x)(2x^2-3x) + (x^2-1)(4x-3)$.
$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 4x + 3$

■ **Cours et Méthodes 6 Opérations et dérivation (inverse et quotient)**

■ **Cours et Méthodes 7 Dérivée d'une fonction composée d'une fonction affine**

À vous de jouer !

1. $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-9)^2}$.

2. $g'(x) = \dfrac{5}{(3x+6)^2}$.

3. $h(x) = -3\sin(3x - \pi)$.

■ **Cours et Méthodes 8 Sens de variation d'une fonction**

À vous de jouer !

1. En développant on obtient $(1+x)^2 + 1 = 1 + 2x + x^2 + 1$ $= x^2 + 2x + 2$. Un carré étant toujours positif on a :
$x^2 + 2x + 2 = (1+x)^2 + 1 \geq 1 > 0$. Le dénominateur de la fraction définissant g ne s'annule donc jamais et la fonction g est bien définie pour tout réel x.

2. La fonction g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $u(x) = -4x - 4$ et $v(x) = x^2 + 2x + 2$, la fonction v du dénominateur ne s'annulant jamais. On a pour tout réel x que $u'(x) = -4$ et $v'(x) = 2x + 2$. La fonction g est donc dérivable et pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$
$$= \frac{-4(x^2+2x+2)-(-4x-4)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{4x^2+8x}{(x^2+2x+2)^2}.$$

3. Pour tout réel x, en factorisant par $4x$, on a l'égalité $4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$.

4. On dresse le tableau de signes de g' et le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$4x^2 + 8 = 4x(x + 2)$		+		−		+	
$(x^2 + 2x + 2)^2$		+		+		+	
Signe de $g'(x)$		+		−		+	
Variation de g		↗	$\frac{2}{5}$	↘	-2	↗	

Ainsi la fonction g est :
– croissante sur $]-\infty\,;-2]$;
– décroissante sur $[-2\,;0]$;
– croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Testez vos connaissances

1. C – **2.** B – **3.** A – **4.** B – **5.** C – **6.** A – **7.** C – **8.** B – **9.** B

CHAPITRE 10 – Primitives

Testez vos prérequis

1. B – **2.** C – **3.** A – **4.** B

Cours et Méthodes 1 Primitives d'une fonction

À vous de jouer !

1. On a $F'(x) = 20x^4 - 6x \neq f(x)$ donc F n'est pas une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. a) On a bien $F'(x) = 5x^4 - 2 * 2x = 5x^4 - 4x = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions H définies sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = F(x) + k = x^5 - 2x^2 + k$ avec k une constante réelle.

c) G est une primitive de f donc on peut écrire :
$G(x) = x^5 - 2x^2 + k$ avec k une constante réelle.
Or d'une part $G(1) = 3$, d'autre part $G(1) = 1^5 - 2 \times 1^2 + k = -1 + k$.
Donc $-1 + k = 3$ et $k = 3 + 1 = 4$. On en déduit que $G(x) = x^5 - 2x^2 + 4$.

Cours et Méthodes 2 Primitives de fonctions usuelles

À vous de jouer !

1. On a $f(x) = x^n$ avec $n = 11$, donc les primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{x^{11+1}}{11+1} + k = \frac{x^{12}}{12} + k$ avec k une constante réelle.

2. On a $f(x) = 3x^{11} - x^5 + 3x^4 - 6x^3$, donc les primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = 3\frac{x^{11+1}}{11+1} - \frac{x^{5+1}}{5+1} + 3\frac{x^{4+1}}{4+1} - 6\frac{x^{3+1}}{3+1} + k$ avec k une constante réelle.

$$F(x) = \frac{3x^{12}}{12} - \frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} - \frac{6x^4}{4} + k$$
$$F(x) = \frac{x^{12}}{4} - \frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Cours et Méthodes 3 Calcul approché d'une primitive par la méthode d'Euler

À vous de jouer !

1. On a $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $A = 3$, $\omega = 0,5$ et $\varphi = -6$, donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :
$F(t) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Donc $F(t) = \frac{3}{0,5}\sin(0,5t - 6) + k = 6\sin(0,5t - 6) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. On a $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A = 1$, $\omega = 0,5$ et $\varphi = 0$, donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :
$F(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Donc : $F(t) = -\frac{1}{0,5}\cos(0,5t) + k = -2\cos(0,5t) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Testez vos connaissances

1. B – **2.** A et B – **3.** C – **4.** A – **5.** B – **6.** C – **7.** B – **8.** C – **9.** A